

# Module L03 : TRANSFERTS THERMIQUES

## Corrigés des exercices posés en partiels

### 1 Contrôle de température lors de travaux

#### 1.1 Dimensionnement du chauffage

1.1/

polyéthylène :  $\frac{1}{u} = 0,13 + \frac{3 \times 10^{-4}}{0,2} + 0,04 = 0,171 \text{ m}^2 \text{K/W} \Rightarrow u = 5,83 \text{ W/m}^2 \text{K}$

$$A = \pi \times \frac{10^2}{4} = 78,5 \text{ m}^2$$

béton :  $\frac{1}{u} = 0,13 + \frac{0,2}{1,75} + 0,04 = 0,284 \text{ m}^2 \text{K/W} \Rightarrow u = 3,52 \text{ W/m}^2 \text{K}$

$$A = \pi \times 10,2 \times 2,4 = 76,9 \text{ m}^2$$

$$H = 5,83 \times 78,5 + 3,52 \times 76,9 = 728 \text{ W/K}$$

Pas de déperdition par le sol.

$$P = H \times (\theta_i - \theta_e) = 728 \times (10 - 0) = 7280 \text{ W} \Rightarrow \boxed{7,3 \text{ kW}}$$

#### 1.2 Température de surface

1.2/ Béton :  $\varphi = u (\theta_i - \theta_e) = 3,52 \times 10 = 35,2 \text{ W/m}^2$

$$\varphi = \left( \frac{\theta_i - \theta_{s,i}}{R_{s,i}} \right) R_{s,i} \Rightarrow \theta_{s,i} = \theta_i - \frac{\varphi R_{s,i}}{1} = 10 - \frac{35,2 \times 0,13}{1} = \boxed{5,4 \text{ }^\circ\text{C}}$$

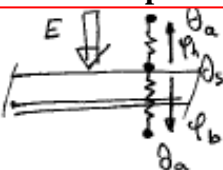
#### 1.3 Consommation énergétique

1.3/  $Q = P \times t = 7,3 \times 24 \times 5 = \boxed{876 \text{ kWh}}$

### 2 Sollicitations thermiques sur un ouvrage d'art

#### 2.1 Profil de températures

2.2/



Bilan de la surface de l'enrobre (flux surfaciques)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{flux solaire} : E \times (1 - \rho) = \varphi_s \text{ (reçu)} \\ \text{flux vers le haut} : \varphi_h = \frac{\theta_s - \theta_a}{R_{se}} = u_h (\theta_s - \theta_a) \text{ (cédé)} \\ \text{flux vers le bas} : \varphi_b = u_b \times (\theta_s - \theta_a) \text{ (cédé)} \end{array} \right.$$

$$\varphi_s = \varphi_h + \varphi_b$$

$$\Rightarrow E(1 - \rho) = u_h (\theta_s - \theta_a) + u_b (\theta_s - \theta_a) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_h = 1/R_{se} = 33,3 \text{ W/m}^2 \text{K} \\ u_b = \left( R_{si} + \frac{e_{aer}}{\lambda_{aer}} + \frac{e_{enrob}}{\lambda_{enrob}} \right)^{-1} = 6,16 \end{array} \right.$$

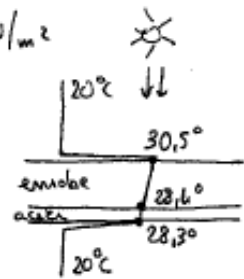
$$\Rightarrow \theta_s = \theta_a + \frac{E(1 - \rho)}{u_h + u_b} = 20 + \frac{500 \times (1 - 0,18)}{32,9 + 6,16} = \boxed{30,5 \text{ }^\circ\text{C}}$$

flux surfacique:  $q = U_b \times (\theta_s - \theta_a) = 6,16 \times (30,5 - 20) = 64,7 \text{ W/m}^2$

Interface acier-embolie:  $\theta_1 = 30,5 - \frac{0,07}{2,2} \times 64,7 = 28,4^\circ\text{C}$

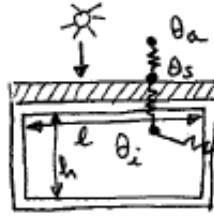
Surface inferieure acier:  $\theta_2 = 28,4 - \frac{0,03}{52} \times 64,7 = 28,3^\circ\text{C}$

On neigie:  $28,3 - 0,13 \times 64,7 \approx 20^\circ\text{C}$



## 2.2 Equilibre du caisson fermé

2.3/ Bilans pour 1 m de tuberie:



bilan de la surface:  $E(1-p) = U_h(\theta_s - \theta_a) + U_b(\theta_s - \theta_i)$  (1)

bilan de l'air interne:  $l U_b(\theta_s - \theta_i) = (l + 2h) U_c(\theta_i - \theta_a)$  (2)

avec:  $\frac{1}{U_c} = R_{si} + \left(\frac{e}{\lambda}\right)_{air} + R_{se} = 0,13 + \frac{0,03}{52} + 0,03 = 0,16$

$\Rightarrow U_c = 6,23 \text{ W/m}^2\text{K}$

(1)  $\Leftrightarrow \theta_s = \frac{U_h \theta_a + U_b \theta_i + E(1-p)}{U_h + U_b}$  on substitue ensuite dans (2)

(2)  $\Leftrightarrow l U_b \left( \frac{U_h \theta_a + U_b \theta_i + E(1-p)}{U_h + U_b} \right) - l U_b \theta_i = (l + 2h) U_c \theta_i - (l + 2h) U_c \theta_a$

$\Leftrightarrow \theta_i = \frac{l U_b \frac{U_h \theta_a + E(1-p)}{U_h + U_b} + (l + 2h) U_c \theta_a}{(l + 2h) U_c + l U_b - \frac{l U_b^2}{U_h + U_b}} = \frac{671,8 + 1121,4}{641,7} = 27,7^\circ\text{C}$

## 3 Refroidissement de l'eau dans une canalisation

3.1/  $\frac{1}{\psi} = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{R_e}{R_i} + \frac{R_{se}}{\pi R_e} = \frac{1}{2\pi \times 0,036} \ln \frac{0,1}{0,05} + \frac{0,04}{\pi \times 0,2} = 3,12 \text{ mK/W}$

$\Rightarrow \psi = 0,32 \text{ W/mK}$

3.2/  $\theta(t) = \theta_{amb} + (\theta_0 - \theta_{amb}) e^{-\frac{t}{\tau}}$   $\tau = \frac{M \cdot c}{\psi \cdot 1} \left[ \frac{\log \times J \log \times k^{-1}}{W \cdot m^2 \cdot K^{-1} \cdot m} \right] \Rightarrow [s]$

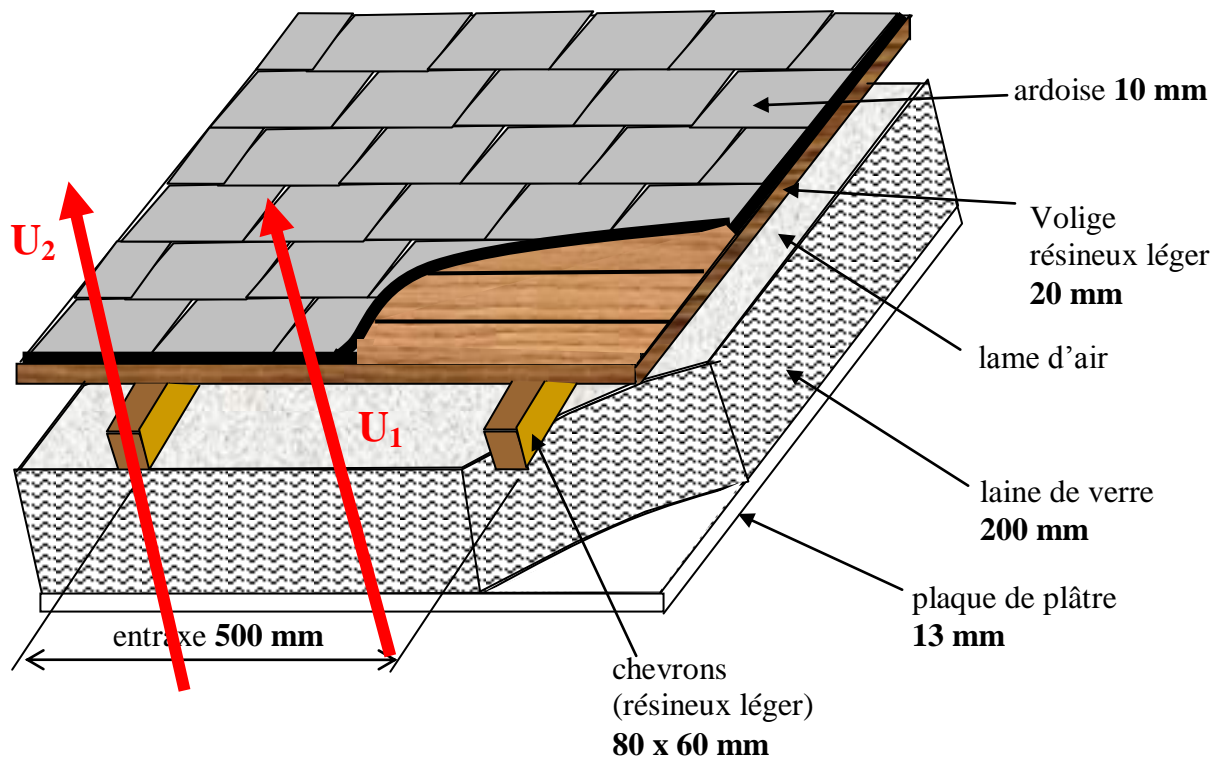
M = masse d'eau contenue dans 1 m. de tube

$M = \frac{\pi \times 0,1^2}{4} \times 1000 = 7,85 \text{ kg} \Rightarrow \tau = \frac{7,85 \times 4180}{0,32 \times 1} \approx 10^5 \text{ s} = 28,5 \text{ h}$

$t = -\tau \times \ln \frac{\theta(t) - \theta_{amb}}{\theta_0 - \theta_{amb}} = -28,5 \times \ln \frac{0 - (-10)}{10 - (-10)} = 19,7 \text{ h}$

## 4 Etude d'une toiture

Une maison d'habitation comporte des combles aménagés dont la toiture a la structure représentée ci-dessous.



NB : les propriétés des matériaux n'étaient pas données dans le sujet, car les étudiants disposaient d'annexes, avec les valeurs de  $\lambda$ . Dans ce corrigé, on prendra les valeurs suivantes :

- Plâtre :  $\lambda=0.25$  W/(m.K)
- Laine de verre :  $\lambda=0.04$  W/(m.K)
- Bois (chevrons, volige) :  $\lambda=0.15$  W/(m.K)
- Ardoise :  $\lambda=0.15$  W/(m.K)

### 4.1 Conditions hivernales nocturnes

a) La toiture peut être décomposée en une partie courante n°1 (au droit de la lame d'air) et une partie chevrons n°2 (au droit des chevrons).

- Partie courante :

$$\frac{1}{U_1} = R_{si} + \frac{e_{platre}}{\lambda_{platre}} + \frac{e_{ldv}}{\lambda_{ldv}} + R_{lame} + \frac{e_{volige}}{\lambda_{volige}} + \frac{e_{ardoise}}{\lambda_{ardoise}} + R_{se}$$

$$= 0.1 + \frac{0.013}{0.25} + \frac{0.2}{0.04} + 0.13 + \frac{0.02}{0.15} + \frac{0.01}{3} + 0.04 = 5.458 \text{ m}^2 \cdot \text{K}/\text{W}$$

$$U_1 = 0.183 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

- Partie chevrons :

$$\frac{1}{U_2} = R_{si} + \frac{e_{platre}}{\lambda_{platre}} + \frac{e_{ldv}}{\lambda_{ldv}} + \frac{e_{chevron}}{\lambda_{chevron}} + \frac{e_{volige}}{\lambda_{volige}} + \frac{e_{ardoise}}{\lambda_{ardoise}} + R_{se}$$

$$= 0.1 + \frac{0.013}{0.25} + \frac{0.2}{0.04} + \frac{0.08}{0.15} + \frac{0.02}{0.15} + \frac{0.01}{3} + 0.04 = 5.862 \text{ m}^2 \cdot \text{K}/\text{W}$$

$$U_2 = 0.171 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

$$U_{\text{eq}} = \frac{U_1 e_1 + U_2 e_2}{e_1 + e_2} = \frac{0.183 \times 0.44 + 0.171 \times 0.06}{0.5} = 0.181 \text{ m}^2\text{K/W}$$

Il est à noter que dans ce cas, l'influence des chevrons sur le U équivalent est extrêmement faible. Les chevrons s'avèrent être plus isolants que la lame d'air. Dans ce cas précis, ils agissent à l'opposé d'un pont thermique.

b) Flux de chaleur :  $\Phi = AU_{\text{eq}}(\theta_{\text{int}} - \theta_{\text{ext}}) = 30 \times 0.181 \times (19 - 0) = 103.2 \text{ W}$

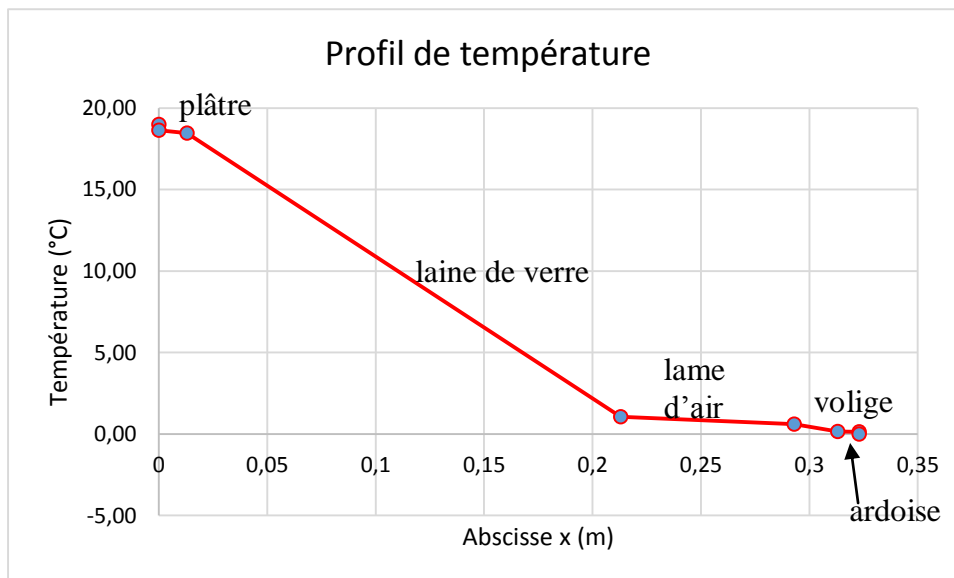
c) profil de température en partie courante de la paroi (au droit de la lame d'air entre chevrons).

Température de surface intérieure :  $\theta_{s \text{ int}} = \theta_{\text{int}} - R_{si} \cdot \varphi$  ( $\varphi$  = flux surfacique)

Température interface plâtre/laine de verre :  $\theta_1 = \theta_{s \text{ int}} - R_{\text{platre}} \cdot \varphi$

Etc...

|                |                                       |        |                        | Abscisse (m) | $\theta$ interface (°C) |
|----------------|---------------------------------------|--------|------------------------|--------------|-------------------------|
|                | e                                     | lambda | R (m <sup>2</sup> K/W) | 0            | 19,00                   |
|                | Rsi                                   |        | 0,100                  | 0            | 18,65                   |
| platre         | 0,013                                 | 0,25   | 0,052                  | 0,013        | 18,47                   |
| laine de verre | 0,2                                   | 0,04   | 5,000                  | 0,213        | 1,07                    |
| lame d'air     | 0,08                                  |        | 0,130                  | 0,293        | 0,61                    |
| volige         | 0,02                                  | 0,15   | 0,133                  | 0,313        | 0,15                    |
| ardoise        | 0,01                                  | 3      | 0,003                  | 0,323        | 0,14                    |
|                | Rse                                   |        | 0,040                  | 0,323        | 0,00                    |
|                | R tot (m <sup>2</sup> K/W)            |        | 5,459                  |              |                         |
|                | flux surfacique (W/m <sup>2</sup> ) : |        | 3,481                  |              |                         |



## 4.2 Conditions hivernales, journée ensoleillée

a) température de la face extérieure des ardoises

Soit  $\theta_s$  la température inconnue de surface des ardoises. On effectue le bilan thermique de la surface externe de l'ardoise :

- Flux solaire absorbé :  $\varphi_s = 850 \text{ W/m}^2$

- Flux rejeté vers l'extérieur par échange superficiel :  $\varphi_r = \frac{1}{R_{se}}(\theta_s - \theta_{ext})$
- Flux transmis vers l'intérieur au travers de la paroi :  $\varphi_t = \frac{1}{R_{int}}(\theta_s - \theta_{int})$

Avec :

$$R_{int} = R_{si} + \frac{e_{\text{platre}}}{\lambda_{\text{platre}}} + \frac{e_{\text{ldv}}}{\lambda_{\text{ldv}}} + R_{\text{lame}} + \frac{e_{\text{volige}}}{\lambda_{\text{volige}}} + \frac{e_{\text{ardoise}}}{\lambda_{\text{ardoise}}} = 5.418 \text{ m}^2\text{K/W}$$

Bilan :

$$\varphi_s = \varphi_r + \varphi_t$$

$$\theta_s = \frac{\varphi_s + \frac{\theta_{ext}}{R_{se}} + \frac{\theta_{int}}{R_{int}}}{\frac{1}{R_{se}} + \frac{1}{R_{int}}} = \frac{850 + \frac{0}{0.04} + \frac{19}{5.418}}{\frac{1}{0.04} + \frac{1}{5.418}} = 33.9^\circ\text{C}$$

b) Calculer les déperditions (ou apports) du pan de toiture de 30m<sup>2</sup>. Conclure.

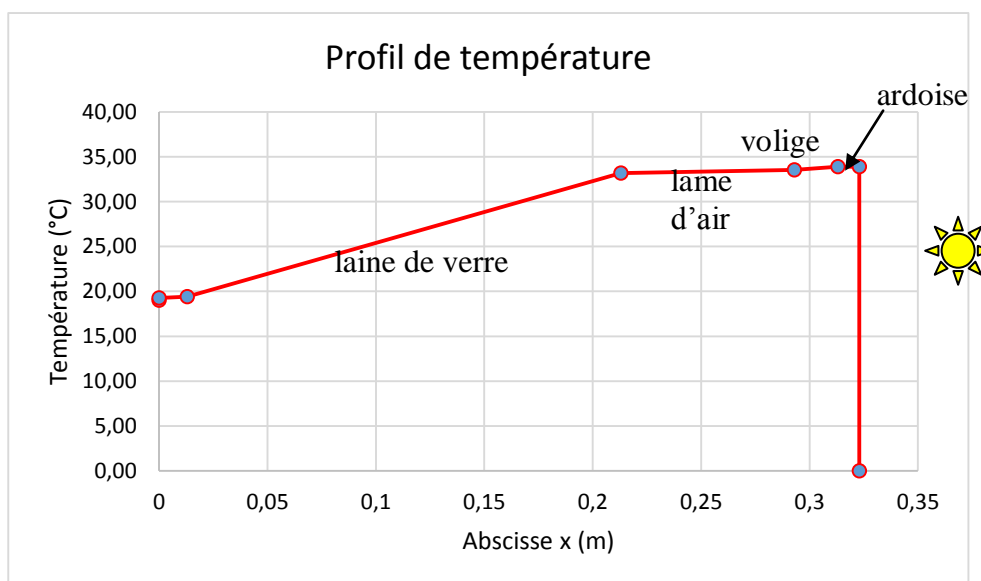
Flux surfacique traversant la paroi (de l'extérieur vers l'intérieur) :

$$\varphi_t = \frac{1}{R_{int}}(\theta_s - \theta_{int}) = \frac{1}{5.418}(33.9 - 19) = 2.75 \text{ W/m}^2$$

Ce flux est positif. On a donc des **apports** de chaleur depuis la toiture.

c) Tracer le profil de température en partie courante de la paroi (au droit de la lame d'air entre chevrons). Quelle est la température moyenne de la lame d'air ?

|                | e     | lambda | R (m <sup>2</sup> K/W) | Abscisse (m) | θ interface (°C) |                          |
|----------------|-------|--------|------------------------|--------------|------------------|--------------------------|
|                |       |        |                        | 0            | 19,00            |                          |
|                | Rsi   |        | 0,100                  | 0            | 19,28            |                          |
| platre         | 0,013 | 0,25   | 0,052                  | 0,013        | 19,42            |                          |
| laine de verre | 0,2   | 0,04   | 5,000                  | 0,213        | 33,17            |                          |
| lame d'air     | 0,08  |        | 0,130                  | 0,293        | 33,53            |                          |
| volige         | 0,02  | 0,15   | 0,133                  | 0,313        | 33,89            |                          |
| ardoise        | 0,01  | 3      | 0,003                  | 0,323        | <b>33,90</b>     | temp. surface extérieure |
|                | Rse   |        | 0,040                  | 0,323        | 0,00             |                          |



La lame d'air est à 33.3°C de température moyenne.

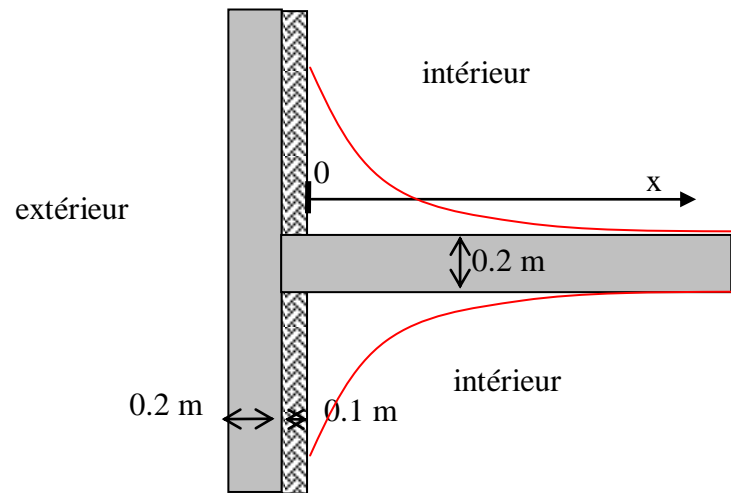
**Remarque :** dans la réalité, des lames d'air de ce type sont **ventilées**, de manière à éviter les problèmes de condensation. Le résultat réel est alors très différent, avec une température de lame d'air beaucoup plus proche de la température extérieure.

## 5 Pont thermique

On étudie le pont thermique constitué de la jonction d'un plancher (dalle pleine en béton) avec un mur extérieur (en béton banché).

Données :

- $\lambda_{\text{béton}} = 2 \text{ W/mK}$
- $\lambda_{\text{isolant}} = 0.04 \text{ W/mK}$
- épaisseur plancher = 0.2 m
- épaisseur mur béton = 0.2 m
- épaisseur isolant = 0.1 m
- $R_{se}(\text{mur}) = 0.04 \text{ m}^2\text{K/W}$
- $R_{si}(\text{mur}) = 0.13 \text{ m}^2\text{K/W}$
- $R_{si}(\text{plancher}) = 0.13 \text{ m}^2\text{K/W}$
- Température ambiante intérieure : 20°C
- Température ambiante extérieure : 0°C



Valeur moyenne de la température de surface sur l'intervalle  $0 \leq x \leq 1$  : 18.72 °C

Ici, le flux traversant le pont thermique va être calculé à partir de la seule donnée dont nous disposons, à savoir la température moyenne le long du plancher.

Flux évacué par le plancher, pour une longueur de 1 m de pont thermique :

$$\Phi = 2 \times 1 \times \int_0^l \frac{1}{R_{si}} (\theta_{int} - \theta_{surf}(x)) dx = \frac{2}{R_{si}} \int_0^l (\theta_{int} - \theta_{surf}(x)) dx$$

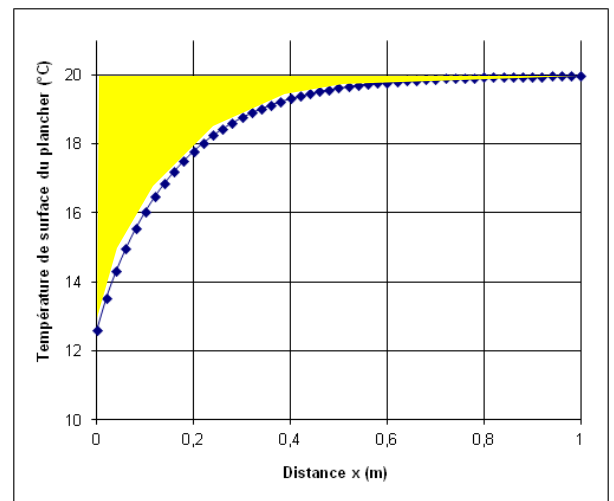
$$= \frac{2}{R_{si}} (\theta_{int} - \theta_{surf\ moy})$$

2 faces de plancher

$$\Phi = \frac{2}{0.13} (20 - 18.72) = 19.7 \text{ W}$$

$$\Phi = L \cdot \psi \cdot (\theta_{int} - \theta_{ext}) \Rightarrow \psi = \frac{\Phi}{L \cdot (\theta_{int} - \theta_{ext})}$$

$$\psi = \frac{19.7}{1 \times (20 - 0)} = 0.985 \text{ W/(m.K)}$$



**Remarque :**

- Les autres données sont inutiles, dans ce cas.
- La méthode par le flux calculé à partir du plancher est moins précise que celle, vue en TP, du flux calculé à partir de la surface externe du mur. En effet, le pont thermique modifie très légèrement le flux surfacique dans le mur, au voisinage de la jonction. Ceci n'est pas pris en compte par la présente méthode.

## 6 Gel d'un réservoir d'eau

Une cuve cylindrique en acier non isolée (diamètre 1.5m, longueur 2.5m), complètement remplie d'eau, est entreposée sur un chantier pendant une période de froid. La température initiale de l'eau stockée est de 5°C, la température extérieure moyenne annoncée par la météorologie nationale pour les jours à venir est de -5°C. Vous semble-t-il raisonnable de stocker cette cuve pleine à l'extérieur pendant la durée d'un week-end (65 heures), sachant que le risque d'éclatement apparaît dès que 10% de la masse d'eau a gelé ? On néglige la résistance superficielle du contact eau/acier, ainsi que la résistance thermique de l'acier de la cuve. La résistance superficielle à la surface extérieure de la cuve est de 0.04m<sup>2</sup>K/W.

**Rappel :** chaleur latente de fusion de la glace  $L_f = 334$  kJ/kg.

## 7 Plancher à entrevous isolants

a) On calcule le coefficient U correspondant à chaque partie du plancher :

$$\text{Partie A : } \frac{1}{U_A} = 0.17 + \frac{0.05}{2} + \frac{0.15}{0.043} + 0.04 = 3.72 \text{ m}^2\text{K/W} \Rightarrow U_A = 0.269 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

$$\text{Partie B : } \frac{1}{U_B} = 0.17 + \frac{0.2}{2} + 0.04 = 0.31 \text{ m}^2\text{K/W} \Rightarrow U_B = 3.226 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

$$\text{En raisonnant sur un élément répétitif : } U_{\text{eq}} = \frac{0.269 \times 0.5 + 3.226 \times 0.1}{0.5 + 0.1} = 0.762 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

b) Flux :  $\varphi = 50 \times 0.762 \times (19 - 5) = 533.4 \text{ W}$     Energie :  $0.5334 \times 24 = 12.8 \text{ kWh}$

c) Flux surfacique en A :

$$\varphi_A = U_A (T_i - T_e) = 0.269 \times (19 - 5) = 3.766 \text{ W}/\text{m}^2$$

$$\varphi_A = \frac{T_i - T_{SA}}{R_{Si}} \Rightarrow T_{SA} = T_i - R_{Si} \cdot \varphi_A = 19 - 0.17 \times 3.766 = 18.4^\circ\text{C}$$

De manière analogue :  $T_{SB} = 11.3^\circ\text{C}$

d) A) Température à l'interface dalle/entrevous :

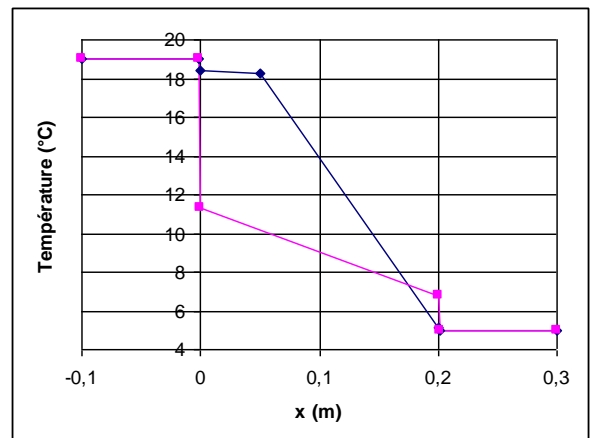
$$T_1 = 18.4 - 3.766 \times 0.05/2 = 18.3^\circ\text{C}$$

Température sur la face inférieure du plancher :

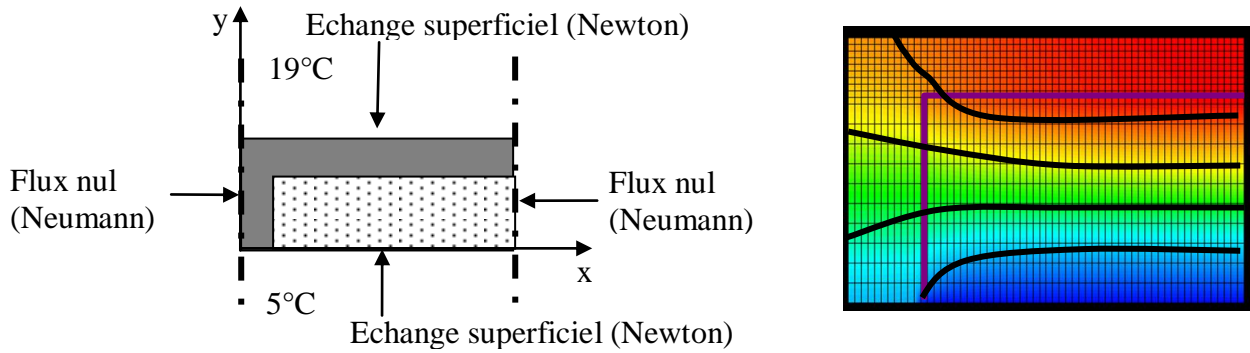
$$T_2 = 18.3 - 3.766 \times 0.15/0.043 = 5.16^\circ\text{C}$$

B) Température sur la face inférieure du plancher :

$$T_3 = 11.3 - 45.16 \times 0.2/2 = 6.78^\circ\text{C}$$



e) En réalité, le problème est bidimensionnel. Chaque entrevous constitue un pont thermique, et la température qui dépend principalement de y, dépend également de x, notamment dans la zone de jonction entre poutrelles et dalle de compression. L'étude exacte peut s'effectuer par un modèle éléments fini, en 2D. A cause des symétries, on se contente de modéliser le domaine comme suit :



Le flux traversant le plancher est calculé, par exemple, sur la surface supérieure.  
 Les lignes isothermes sont resserrées dans l'isolant, et plus écartées dans les poutrelles.  
 Certaines aboutissent jusqu'aux surfaces au niveau des poutrelles, puisque la température de surface n'est pas uniforme.

## 8 Tuyauterie de chauffage

$$a) \frac{1}{\psi} = \frac{6 \times 10^{-4}}{\pi \times 0.036} + \frac{1}{2\pi \times 52} \ln \frac{0.02}{0.018} + \frac{0.05}{\pi \times 0.04} = 0.403 \text{ mK/W} \Rightarrow \psi = 2.48 \text{ W/(m.K)}$$

$$b) \text{ Température d'eau à la sortie du tube : } \theta_s = 15 + (90 - 15)e^{-\frac{2.48 \times 120}{1200/3600 \times 4180}} = 75.6^\circ\text{C}$$

Puissance thermique émise :  $P = 1200/3600 \times 4.18 \times (90 - 75.6) = 20.1 \text{ kW}$

c) Température d'entrée d'eau pour  $P=10\text{kW}$

$$P = \dot{m}C(\theta_0 - \theta_s) \Rightarrow \theta_s = \theta_0 - \frac{P}{\dot{m}C} = \theta_a + (\theta_0 - \theta_a)e^{-\frac{\psi L}{\dot{m}C}}$$

$$\Rightarrow \theta_0 = \frac{\theta_a \left(1 - e^{-\frac{\psi L}{\dot{m}C}}\right) + \frac{P}{\dot{m}C}}{\left(1 - e^{-\frac{\psi L}{\dot{m}C}}\right)} = \theta_a + \frac{P}{\dot{m}C \left(1 - e^{-\frac{\psi L}{\dot{m}C}}\right)} = 15 + \frac{10}{0.33 \times 4.18 \times \left(1 - e^{-\frac{2.48 \times 120}{0.33 \times 4180}}\right)} = 52.3^\circ\text{C}$$

d) Refroidissement : on effectue le bilan thermique de l'eau contenue dans 1m de tube,

$$\text{soit une masse : } m = \pi \times \frac{0.036^2}{4} \times 1 \times 1000 = 1.018 \text{ kg}$$

Cette masse se refroidit en cédant un flux au travers d'une paroi dont le coefficient de transmission est :  $H = \psi \cdot L \text{ (W/K)}$

$$\theta(t) = \theta_{amb} + (\theta_0 - \theta_{amb})e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \frac{mC}{\psi L} = \frac{1.018 \times 4180}{2.48 \times 1} = 1716 \text{ s}$$

$$t = -\tau \cdot \ln \left( \frac{\theta(t) - \theta_{amb}}{\theta_0 - \theta_{amb}} \right) = -1716 \times \ln \left( \frac{25 - 15}{80 - 15} \right) = 3212 \text{ s} \approx 53 \text{ minutes}$$



## 9 Enveloppe d'un bâtiment industriel

### 9.1 Etude de la paroi en partie courante

Pour cette paroi, calculer :

- a) le coefficient de transmission thermique surfacique U,

$$\frac{1}{U} = R_{si} + \frac{e_{acier}}{\lambda_{acier}} + \frac{e_{isolant}}{\lambda_{isolant}} + \frac{e_{acier}}{\lambda_{acier}} + R_{se}$$

$$= 0.13 + \frac{0.0015}{52} + \frac{0.1}{0.026} + \frac{0.0015}{52} + 0.04 = 4.016 \text{ m}^2\text{K/W}$$

$$U = \frac{1}{4.016} = 0.249 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$$

- b) le flux surfacique échangé,

$$\varphi = U(T_{int} - T_{ext}) = 0.249(19 - (-5)) = 5.976 \text{ W/m}^2$$

- c) la température des peaux en acier, coté intérieur et coté extérieur,

Calcul des températures de surface :

$$\text{Intérieur : } \varphi = \frac{1}{R_{si}}(T_{int} - T_{s \text{ acier int}}) \Rightarrow T_{s \text{ acier int}} = T_{int} - \varphi \cdot R_{si} = 19 - 5.976 \cdot 0.13 = 18.22^\circ\text{C}$$

$$\text{Extérieur : } \varphi = \frac{1}{R_{se}}(T_{s \text{ acier ext}} - T_{ext}) \Rightarrow T_{s \text{ acier ext}} = T_{ext} + \varphi \cdot R_{se} = -5 + 5.976 \cdot 0.04 = -4.76^\circ\text{C}$$

*Remarque :* la résistance thermique de la peau en acier ( $R=2.9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\text{K/W}$ ) est négligeable devant celle de la paroi. On peut donc considérer que la température de chaque couche d'acier est constante dans son épaisseur.

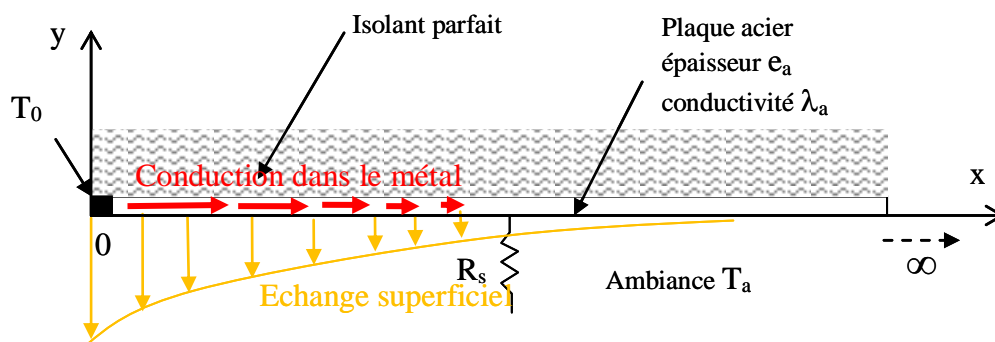
- d) l'énergie échangée pendant 24 heures à travers  $100 \text{ m}^2$  de cette paroi (exprimer le résultat en [USJ], puis en kWh)

$$E = \varphi A t = 5.976 \times 100 \times 24 \times 3600 = 5.163 \times 10^7 \text{ J} = 14.3 \text{ kWh}$$

### 9.2 Etude théorique et démonstrations

- a) Représenter par des flèches sur le schéma les différents flux de chaleur échangés dans ce dispositif : densité surfacique de flux échangée entre l'ambiance et la peau en acier, flux transmis par conduction dans l'acier

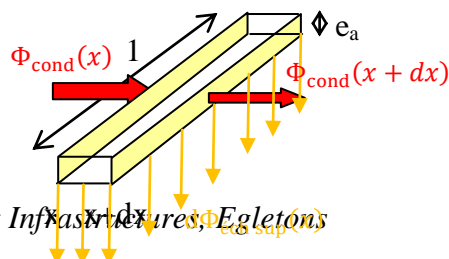
On représente ci-dessous le cas où  $T_0 > T_a$ , mais les formules obtenues en 2.2.2. sont généralisables



- b) **Démontrer** que la répartition de température de l'acier le long de la plaque est donnée par

$$T(x) = T_a + (T_0 - T_a) \cdot \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\lambda_a e_a R_s}} x\right)$$

Ecrivons l'équilibre d'une « tranche » de plaque de longueur  $dx$  (suivant  $x$ ), d'épaisseur  $e_a$  (suivant  $y$ ), et de largeur 1 (suivant  $z$ ) :



Flux entrant par conduction à l'abscisse x :  $\Phi_{\text{cond}}(x) = -\lambda_a \times e_a \times 1 \times \left(\frac{dT}{dx}\right)_x$

Flux sortant par conduction à l'abscisse x+dx :  $\Phi_{\text{cond}}(x+dx) = -\lambda_a \times e_a \times 1 \times \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx}$

Bilan des flux entrant par conduction :  $\Phi_{\text{cond}}(x) - \Phi_{\text{cond}}(x+dx) = \lambda_a \times e_a \times 1 \times \left(\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - \left(\frac{dT}{dx}\right)_x\right)$

Flux sortant par échange superficiel de la tranche d'épaisseur dx :  $d\Phi_{\text{éch sup}}(x) = dx \times 1 \times (T(x) - T_a)$

**Bilan des flux :**  $\Phi_{\text{cond}}(x) - \Phi_{\text{cond}}(x+dx) = d\Phi_{\text{éch sup}}(x)$

$$\lambda_a \times e_a \times 1 \times \left(\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - \left(\frac{dT}{dx}\right)_x\right) = dx \times 1 \times \frac{1}{R_s} (T(x) - T_a)$$

$$\frac{\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - \left(\frac{dT}{dx}\right)_x}{dx} = \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_a \times e_a \times R_s} (T(x) - T_a)$$

En effectuant le changement de variable :  $u = T(x) - T_a$ , et en posant :  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_a \times e_a \times R_s}}$  on a donc une équation

différentielle de la forme :  $\frac{d^2u}{dx^2} = \alpha^2 u$

dont la solution est de la forme :  $u = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$ , où A et B sont des constantes à déterminer.

Si  $x \rightarrow +\infty$ , il est physiquement impossible que  $T \rightarrow +\infty$  et donc que  $u \rightarrow +\infty$ . Donc  $A=0$

Donc  $T(x) = T_a + Be^{-\alpha x}$

Conditions aux limites : lorsque  $x=0$ ,  $T(x)=T_0$ , donc  $T_0 = T_a + Be^0 \Rightarrow B = T_0 - T_a$

D'où la solution :  $T(x) = T_a + (T_0 - T_a) \cdot \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\lambda_a e_a R_s}} x\right)$

*NB* : cette équation, et le phénomène physique étudié sont analogues au cas de l'ailette, dont la démonstration a été faite en cours. Ici, la section de l'ailette est :  $1 \times e_a$ , et le périmètre sur lequel s'opère l'échange est : 1

- c) **Démontrer** que le flux linéique de chaleur dans la plaque (par unité de longueur suivant z) est, en  $x=0$  :

$$\varphi_l = \sqrt{\frac{\lambda_a e_a}{R_s}} (T_0 - T_a)$$

On écrit l'expression du flux par conduction en  $x=0$  :

$$\varphi_l = -\lambda_a e_a \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = -\lambda_a e_a (T_0 - T_a) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{\lambda_a e_a R_s}}\right) \exp\left(-\frac{0}{\sqrt{\lambda_a e_a R_s}}\right) = \sqrt{\frac{\lambda_a e_a}{R_s}} (T_0 - T_a)$$

- d) **Application numérique**

En prenant les valeurs suivantes :

- $e_a = 1.5$  mm
- $\lambda_a = 52$  [USI]
- $R_s = 0.04$  [USI]
- $T_0 = 10^\circ\text{C}$ ,  $T_a = 0^\circ\text{C}$

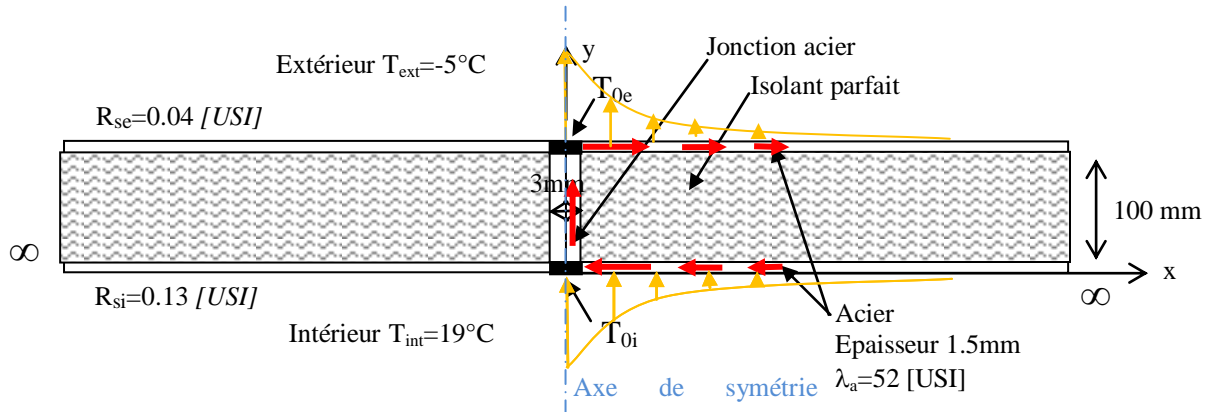
Calculer la température de la plaque à l'abscisse  $x=0.3$  m, et le flux linéique en  $x=0$ .

Température :  $0.046^\circ\text{C}$  Flux linéique :  $13.96$  W/m

On remarque que la température à 30cm est très proche de la température ambiante. La longueur de la zone d'influence du point de température imposée est donc très inférieure à 30 cm.

### 9.3 Etude d'un pont thermique

- a) Représenter par des flèches sur le schéma les différents flux de chaleur échangés dans ce dispositif : densités surfaciques de flux échangées entre les ambiances et les peaux en acier, flux transmis par conduction dans l'acier



On note la présence d'un axe de symétrie qui permet de n'étudier que la moitié du problème. L'échange entre  $T_{0i}$  (ou  $T_{0e}$ ) et l'ambiance  $T_{int}$  (ou  $T_{ext}$ ) obéit à la même équation qu'en 2.2.2. L'échange entre  $T_{0i}$  et  $T_{0e}$  s'effectue par conduction le long de la jonction en acier.

- b) En effectuant des bilans de flux adéquats, calculer les températures  $T_{0i}$  et  $T_{0e}$  des peaux en acier, au droit de la jonction entre panneaux. On pourra s'aider de l'expression du flux donnée à la question 2.2.2.

Le flux linéique traversant la jonction peut s'écrire de trois manières différentes :

- Flux capté par la peau intérieure :  $\varphi_{int} = \sqrt{\frac{\lambda_a e_a}{R_{si}}} (T_{int} - T_{0i})$
- Flux rejeté par la peau extérieure :  $\varphi_{ext} = \sqrt{\frac{\lambda_a e_a}{R_{se}}} (T_{0e} - T_{ext})$
- Flux par conduction dans l'acier traversant la paroi :  $\varphi_{con} = \frac{\lambda_a e_a}{e_{isolant}} (T_{0i} - T_{0e})$

On a :  $\varphi_{int} = \varphi_{ext} = \varphi_{con}$ , ce qui conduit à l'écriture de 2 équations, qui vont permettre de déterminer les deux inconnues  $T_{0i}$  et  $T_{0e}$  :

$$\begin{cases} \frac{\lambda_a e_a}{e_{isolant}} (T_{0i} - T_{0e}) = \sqrt{\frac{\lambda_a e_a}{R_{se}}} (T_{0e} - T_{ext}) \\ \frac{\lambda_a e_a}{e_{isolant}} (T_{0i} - T_{0e}) = \sqrt{\frac{\lambda_a e_a}{R_{si}}} (T_{int} - T_{0i}) \end{cases}$$

Afin d'alléger les expressions, on effectue tout de suite l'application numérique :

$$\frac{\lambda_a e_a}{e_{isolant}} = 0.78, \quad \sqrt{\frac{\lambda_a e_a}{R_{se}}} = 1.396, \quad \sqrt{\frac{\lambda_a e_a}{R_{si}}} = 0.774, \quad \text{et le système devient :}$$

$$\begin{cases} 0.78(T_{0i} - T_{0e}) = 1.396(T_{0e} + 5) & \Rightarrow 2.176 T_{0e} - 0.78 T_{0i} = -6.98 & (1) \\ 0.78(T_{0i} - T_{0e}) = 0.774(19 - T_{0i}) & \Rightarrow -0.78 T_{0e} + 1.554 T_{0i} = 14.7 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow T_{0i} = 9.459 + 0.5019 \times T_{0e}$$

En substituant (2) dans (1) :  $2.176 T_{0e} - 0.78(9.459 + 0.5019 \times T_{0e}) = -6.98$

$$T_{0e} = \frac{-6.98 + 0.78 \times 9.459}{2.176 - 0.78 \times 0.5019} = \frac{0.398}{1.784} = 0.22^\circ\text{C}$$

$$(2) \Rightarrow T_{0i} = 9.459 + 0.5019 \times 0.22 = 9.57^\circ\text{C}$$

- c) En déduire le flux traversant le pont thermique constitué par la jonction entre panneaux

On reprend l'une des expressions du flux, par exemple :

$$\varphi_{con} = \frac{\lambda_a e_a}{e_{isolant}} (T_{0i} - T_{0e}) = \frac{52 \times 0.0015}{0.1} (9.57 - 0.22) = 7.293 \text{ W/m}$$

Ceci pour la **moitié du problème** (symétrie). Pour le pont thermique complet, on a donc :

$$\varphi_{lin\ tot} = 2 \times 7.293 = 14.586\ W/m$$

d) En déduire le coefficient linéique de transmission  $\psi$  du pont thermique constitué par la jonction

$$\psi = \frac{\varphi_{lin\ tot}}{T_{int}-T_{ext}} = 0.608\ W.m^{-1}.K^{-1}$$

e) Si la largeur des panneaux est de 600 mm, calculer le coefficient  $U_e$  équivalent du mur, intégrant les ponts thermiques.

Pour 1 m<sup>2</sup> de panneau, on a une longueur de pont thermique égale à  $L_{pt} = 1/0.6=1.667\ m$

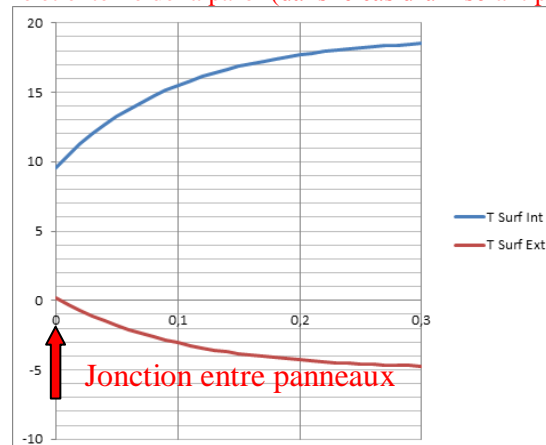
Le  $U$  équivalent du système constructif, incluant les ponts thermiques est donc :

$$U_{\acute{e}q} = U_{partie\ courante} + \psi \times L_{pt} = 0.249 + 0.608 \times 1.667 = 1.2625\ W.m^{-2}.K^{-1}$$

La présence des jonctions entre panneaux, dégrade donc la performance d'isolation de manière très significative ! La peau interne en acier conduit la chaleur captée par échange superficiel vers la jonction, où la paroi traversante en acier conduit cette chaleur vers la face externe. Cette chaleur est ensuite canalisée par la peau externe, qui redistribue vers l'extérieur par échange superficiel.

### REMARQUE COMPLEMENTAIRE (hors épreuve)

Avec l'équation du 2.2.2. et la connaissance des températures  $T_{0i}$  et  $T_{0e}$ , il est possible de tracer la répartition de température sur les peaux interne et externe de la paroi (dans le cas d'un isolant parfait) :



## 10 Isolation d'un BALLON DE STOCKAGE D'EAU CHAUDE

Dans le calcul approché, nous devons déterminer le coefficient de transmission surfacique de la paroi (supposée plane) ainsi que sa surface.

$$\frac{1}{U} = r_{si} + \left(\frac{e}{\lambda}\right)_{acier} + \left(\frac{e}{\lambda}\right)_{isolant} + r_{se} = 0,7 \cdot 10^{-4} + \frac{0,005}{52} + \frac{0,08}{0,041} + 0,05 = 2 \left[ \frac{m^2 \cdot K}{W} \right]$$

$$U = 0,5 \left[ \frac{W}{m^2 \cdot K} \right]$$

La surface est obtenue en décomposant chaque élément et en considérant un rayon moyen :

$$S_{totale} = S_{cylindre} + S_{sphère} = 2 \cdot \pi \cdot 0,3425 \cdot 1 + 4 \cdot \pi \cdot 0,3425^2 = 3,63 [m^2]$$

Le flux vaut donc :

$$\Phi = U \cdot S \cdot (\theta_{eau} - \theta_{air}) = 0,5 \cdot 3,63 \cdot (55 - 15) = 72,6 [W] \quad H = 1,81 \text{ W/K}$$

Dans un calcul exact, nous allons devoir reprendre la théorie vue en cours sur les échanges cylindriques et sphériques.

Dans le cas cylindrique, nous avons :

$$Rth_{cylindrique} = \frac{r_{si}}{S_{ci}} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot l} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot l} \cdot \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) + \frac{r_{se}}{S_{ce}}$$

$$Rth_{cylindrique} = \frac{0,7 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot \pi \cdot 0,3 \cdot 1,0} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 52 \cdot 1,0} \cdot \ln\left(\frac{0,305}{0,300}\right) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 0,041 \cdot 1,00} \cdot \ln\left(\frac{0,385}{0,305}\right) + \frac{0,05}{2 \cdot \pi \cdot 0,385 \cdot 1,0} = 0,925 \left[ \frac{K}{W} \right]$$

Dans le cas sphérique, nous obtenons :

$$Rth_{sphère} = \frac{r_{si}}{S_{ci}} + \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) + \frac{r_{se}}{S_{ce}}$$

$$Rth_{sphère} = \frac{0,7 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot \pi \cdot 0,3^2} + \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 52} \cdot \left(\frac{1}{0,300} - \frac{1}{0,305}\right) + \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 0,041} \cdot \left(\frac{1}{0,305} - \frac{1}{0,385}\right) + \frac{0,05}{4 \cdot \pi \cdot 0,385^2} = 1,349 \left[ \frac{K}{W} \right]$$

La résistance équivalente est obtenue en effectuant une sommation en parallèle :

$$\frac{1}{Rth_{équivalent}} = \frac{1}{Rth_{cylindrique}} + \frac{1}{Rth_{sphérique}} = \frac{1}{0,925} + \frac{1}{1,349} = 1,82 \left[ \frac{W}{K} \right]$$

$$Rth_{équivalent} = 0,549 \left[ \frac{K}{W} \right]$$

$$H = \frac{1}{0,549} = 1,82 \left[ \frac{W}{K} \right]$$

Le flux émis par le ballon de stockage devient :

$$\Phi = \frac{\theta_{eau} - \theta_{air}}{Rth_{équivalent}} = \frac{55 - 15}{0,549} = 72,95 [W]$$